Correction du devoir surveillé $n°1$

Nom :

Exercice 1:

1. (a) $\exists c \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c.$ /1

   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y).$ /1

   (c) $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in]-1;1[,\ f(x) < m.$ /1

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{7\mathbf{i}x} = \mathbf{e}^{5\mathbf{i}x}\left(\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{2\mathbf{i}x}\right) = 2\cos(2x)\mathbf{e}^{5\mathbf{i}x}$ /1

   (b) $$\cos(x) + \cos(3x) = \mathfrak{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{3\mathbf{i}x}\right) = \mathfrak{Re}\left(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}x}\right)\right) = 2\cos(x)\cos(2x)$$ /1

   (c) $$\cos(2x) + \sin(2x) = \sqrt{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\right) = \sqrt{2}\cos\left(2x - \tfrac{\pi}{4}\right)$$ /1

3. Soit $f : E \to F$. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$.

   (a) $\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$ /1

   (b) $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$ /1

   (c) $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$ /1

Exercice 2:

On va le démontrer par récurrence, notons $P(n)$: "$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$" pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : $1 \times 2 = 2$ et $\frac{1\times2\times3}{3} = 2$ donc $P(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned}1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) + (n+1) \times (n+2) &\underset{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1) \times (n+2)\\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie. /4

- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1\times2+2\times3+\cdots+n\times(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 3:

1. Montrons que la propriété « $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \leqslant y$ » est vraie.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Posons $y = \sqrt{x} + 1$. On a $\sqrt{x} \leqslant y$. /1
2. Montrons que la propriété « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leqslant y$ » est fausse i.e. montrons que « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} > y$ ».
   Posons $y = -1$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $y < 0 \leqslant \sqrt{x}$. /1
3. Montrons que la propriété « $\exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \leqslant y$ » est fausse i.e. montrons que « $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} > y$ ».
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Posons $y = -1$. On a $y < 0 \leqslant \sqrt{x}$. /1
4. Montrons que la propriété « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leqslant y$ » est fausse i.e. montrons que « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} > y$ ».
   Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = y^2 + 1$. On a $\sqrt{x} = \sqrt{y^2 + 1} > |y| \geqslant y$. /1
5. Montrons que la propriété « $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x \leqslant y \Rightarrow \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$ » est fausse i.e. montrons que « $\exists x, y \in \mathbb{R}^*, x \leqslant y$ et $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$ ».
   Posons $x = -1$ et $y = 1$. On a bien $x \leqslant y$ et $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$. /1
6. Montrons que la propriété « $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}_+, ac \leqslant bc \Rightarrow a \leqslant b$ » est fausse i.e. montrons que « $\exists a, b \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}_+, ac \leqslant bc$ et $a > b$ ».
   Posons $a = 2$, $b = 1$ et $c = 0$. On a bien $ac \leqslant bc$ et $a > b$. /1

Exercice 4:

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$.
Supposons par l'absurde que $nx \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $nx = \frac{p}{q}$.
D'où $x = \frac{p}{nq} \in \mathbb{Q}$. Absurde.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $nx \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. /2

Exercice 5:

Résoudre l'équation suivante d'inconnue complexe z :

$$(E) : z^8 + (1 - 3\mathbf{i})z^4 - 4 = 0$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $Z = z^4$.
On a : z sol. de $(E) \iff Z$ sol. de $(E') : Z^2 + (1 - 3\mathbf{i})Z - 4 = 0$.
Or (E') admet pour discriminant $\Delta = (1 - 9 - 6\mathbf{i}) + 16 = 8 - 6\mathbf{i} = 2(4 - 3\mathbf{i})$.

Cherchons une racine carrée de Δ. Soit $\delta \in \mathbb{C}$. $\exists a, b \in \mathbb{R}, \delta = a + \mathbf{i}b$.

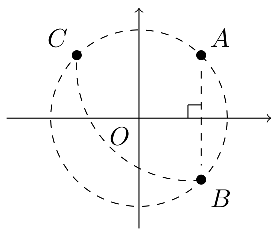
$$\Delta = \delta^2 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} b^2 = 1 \\ ab = -3 \\ a^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} (a,b) = (3,-1) \\ \text{ou} \\ (a,b) = (-3,1) \end{cases}$$

Donc $\delta = 3 - \mathbf{i}$ est une racine carrée de Δ.
Par conséquent, les solutions de (E') sont $\frac{-1+3\mathbf{i}+3-\mathbf{i}}{2} = 1 + \mathbf{i}$ et $\frac{-1+3\mathbf{i}-3+\mathbf{i}}{2} = -2 + 2\mathbf{i}$.
z sol. de $(E) \iff Z = 1 + \mathbf{i}$ ou $Z = -2 + 2\mathbf{i} \iff z^4 = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$ ou $z^4 = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{4}}$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est : /6

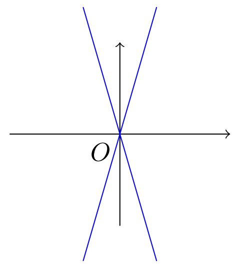
$$\left\{2^{\frac{1}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{16}}; 2^{\frac{1}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{9\pi}{16}}; 2^{\frac{1}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{17\pi}{16}}; 2^{\frac{1}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{25\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{11\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{19\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{27\pi}{16}}\right\}$$

Exercice 6:
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $a = z$, $b = \bar{z}$ et $c = \frac{z^2}{\bar{z}}$.
On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on pose A, B et C les points images des nombres a, b et c.

1. Soit ρ le module de z et θ un argument.
   On a $a = \rho\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$; $b = \rho\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}$ et $c = \rho\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}$. /1
2. (a) les points A et B soient distincts $\iff 2\theta \neq 0[2\pi] \iff \theta \neq 0[\pi]$.
   (b) les points A et C soient distincts $\iff 2\theta \neq 0[2\pi] \iff \theta \neq 0[\pi]$.
   (c) les points B et C soient distincts $\iff 4\theta \neq 0[2\pi] \iff \theta \neq 0[\frac{\pi}{2}]$. /1
3. Les points A, B et C soient deux à deux distincts si et seulement si $\theta \neq 0[\frac{\pi}{2}]$.
   On suppose désormais que cette condition est réalisée. /1
4. On a $|a| = |b| = |c| = \rho$, donc A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon ρ. /1
5. $AB = AC \iff |b - a| = |c - a| \iff |\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}| = |\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}|$.
   Or $|\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}| = \left|\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}\right)\right| = |\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}|$. Donc $AB = AC$. /1
6. On place A sur un point quelconque différent de O. On place B le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. On trace le cercle de centre O et de rayon OA. On place C sur l'intersection de ce cercle avec le cercle de centre A et de rayon AB. /1



7. On pose $Z = \frac{c-a}{c-b}$.
   (a) $Z = \frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}} = \frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}\right)}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\left(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}\right)} = \frac{\sin(\theta)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}{\sin(2\theta)}$. /1
   (b) $$\begin{aligned} |Z| = 1 \iff |\sin(\theta)| = |\sin(2\theta)| &\iff |\sin(\theta)|\,(1 - 2|\cos(\theta)|) = 0 \\ &\iff \underbrace{\sin(\theta) = 0}_{\text{impossible}} \text{ ou } |\cos(\theta)| = \frac{1}{2} \\ &\iff \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ &\iff \theta = \frac{\pi}{3}\left[\frac{\pi}{3}\right] \end{aligned}$$
   /1
8. (a) ABC équilatéral $\iff AC = BC \iff |Z| = 1 \iff \theta = \frac{\pi}{3}\left[\frac{\pi}{3}\right]$.
   Or $\theta \neq 0[\frac{\pi}{2}]$, donc les points A pour lesquels le triangle ABC est équilatéral sont les points d'affixes admettant comme argument $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$.
   Plus simplement, ceux sont les points situés sur les droites (OM) et (ON) où M et N sont d'affixes respectives j et j^2. /1
   (b) /1



Exercice 7: Soit $x \in]-\pi;\pi]$. On résout sur $]-\pi;\pi]$ et on résoudra sur $\mathbb{R}$ ensuite.
On a $\cos(5x) - \cos(3x) = \mathrm{Re}(\mathbf{e}^{5\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{3\mathbf{i}x}) = \mathrm{Re}(2\mathbf{i}\sin(x)\mathbf{e}^{4\mathbf{i}x}) = -\sin(4x)\sin(x)$. Or

$$\begin{aligned} \sin(4x)\sin(x) < 0 &\iff (\sin(x) < 0 \text{ et } \sin(4x) > 0) \text{ ou } (\sin(x) > 0 \text{ et } \sin(4x) < 0) \\ &\iff \left(x \in \left]-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right[\right) \text{ ou } \left(x \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\pi\right[\right) \\ &\iff x \in \left]-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\pi\right[\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solution de (E) est : /6

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left]-\pi + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right[\right)$$